

Chapitre 2. Suites des nombres réels.

§2.1. Exemples des suites. Raisonnement par récurrence.

Def Une suite de nombres réels est une application $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout nombre naturel (pour tout $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$)

Notation: (a_n) - suite où $a_n = f(n)$; $(a_n)_{n \geq 0} = \{a_0, a_1, a_2, \dots\} = \{a_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$
ensemble ordonné

Ex (1) $a_n = n = \{0, 1, 2, \dots\}$

(2) $a_n = \frac{1}{n+1} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

(3) $a_n = (-1)^n = \{1, -1, 1, -1, \dots\}$

(4) Les nombres de Fibonacci: $f_0 = 1 = f_1$; $f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
définie par récurrence
 $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ 

(5) Suite arithmétique $a_n = a \cdot n + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

(6) Suite géométrique $a_n = a \cdot r^n$, $a, r \in \mathbb{R}$; $a \neq 0, r \neq 0, r \neq \pm 1$

-48-

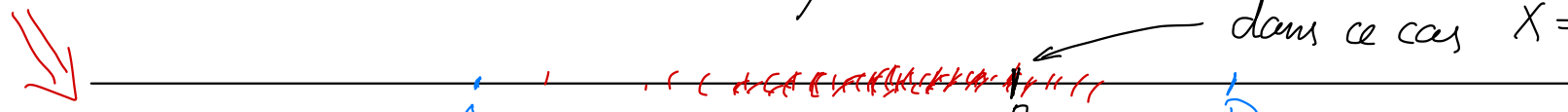
Déf. Une suite est majorée (minorée) s'il existe un nombre M (m) réel tel que $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ($a_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

un majorant ← un minorant

On dit que la suite est bornée si elle est majorée et minorée.

Remarque. Déf $|x| = x$, si $x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$
 $|x| = -x$, si $x < 0$

(a_n) est bornée $\Leftrightarrow \exists x \geq 0$ tel que $|a_n| \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N}$

 dans ce cas $x = |A| = -A$

$\exists A, B: A \leq a_n \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = \max(|A|, |B|)$

Déf. Une suite (a_n) est croissante (strictement croissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_{n+1} \geq a_n$ ($a_{n+1} > a_n$)

Une suite (a_n) est décroissante (strictement décroissante) si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_{n+1} \leq a_n$ ($a_{n+1} < a_n$)

Une suite est dite (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Ex (1) $a_n = n$ strictement croissante, $a_{n+1} = n+1 > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Elle n'est pas majorée : $\mathbb{N}$ n'est pas majoré $\forall S > 0 \exists n \in \mathbb{N} : n > S$.
Elle est minorée par 0.

(2) $a_n = \frac{1}{n+1}$ strictement décroissant $a_{n+1} = \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
bornée : $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(3) $a_n = (-1)^n$ pas monotone; bornée : $-1 \leq a_n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(5) $a_n = a \cdot n + b$ strictement croissante si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$
 $a_{n+1} - a_n = a(n+1) + b - (an + b) = a$

Archimède

Si $a > 0 \Rightarrow \forall S > 0 \quad \forall b \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : a \cdot n > S - b \Leftrightarrow an + b > S$.
 $\Rightarrow$ par l'Archimède (a_n) n'est pas majorée (mais elle est minorée).

Si $a < 0 \Rightarrow$ de manière similaire (a_n) n'est pas minorée.

(4) $f_0 = f_1 = 1$; $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \Rightarrow$ croissante : $f_{n+2} - f_{n+1} = f_n \underset{\in \mathbb{N}}{\geq} 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(f_n) n'est pas majorée : $f_{n+2} - f_{n+1} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 $f_{n+1} - f_n \geq 1$

+

$$f_2 - f_1 \geq 1$$

$$f_1 \geq 1$$

$$f_{n+2} \geq n+2$$

puisque $\mathbb{N}$ n'est pas majoré $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ la suite (f_n) n'est pas majorée.

Raisonnement par récurrence. Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n , tel que (1) L'initialisation: $P(n_0)$ est vraie. et (2) L'Hérédité: Pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ implique $P(n+1)$.

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Proposition $\sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, où (f_n) est la suite de Fibonacci.

(1) Initialisation: $n=0$: $f_0 \stackrel{?}{=} f_2 - 1$; $f_0 = 1, f_2 = 2 \Rightarrow$ Vrai.

(2) Hérédité: Supposons que $\sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ fixé.

Il nous faut démontrer que $\sum_{i=0}^{n+1} f_i \stackrel{??}{=} f_{n+3} - 1$

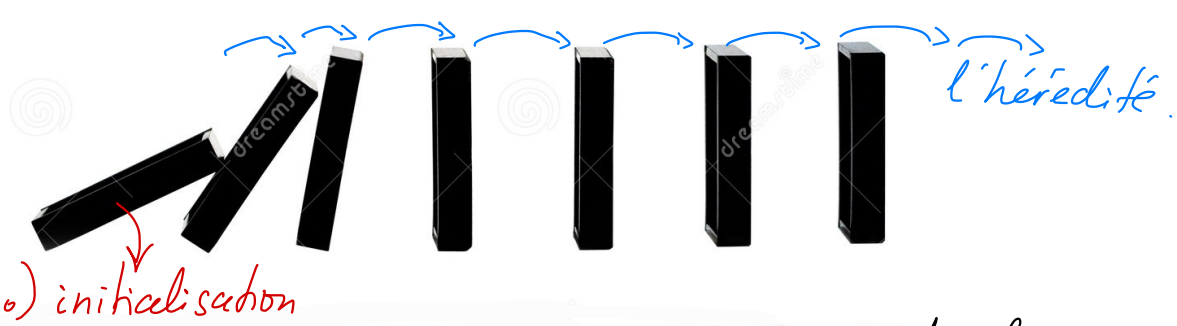
$$\sum_{i=0}^{n+1} f_i = \underbrace{\sum_{i=0}^n f_i}_{\text{Supposition de récurrence}} + f_{n+1} = \underbrace{f_{n+2} - 1}_{\text{Supposition de récurrence}} + f_{n+1} = \underbrace{f_{n+1} + f_{n+2}}_{f_{n+3}} - 1 = \underline{f_{n+3} - 1} \quad \text{Vrai.}$$

$\Rightarrow$ Par récurrence, on a $\sum_{i=0}^n f_i = f_{n+2} - 1$. ◻

Remarque. Généralisation de la méthode de récurrence: Soit $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}$.

(1) $P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n_0+k)$, k fixé sont vraies
 (2) $\{P(n), P(n+1), \dots, P(n+k)\} \Rightarrow P(n+k+1) \quad \forall n \geq n_0$ } $\Rightarrow P(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0$

Démonstration
par récurrence:



-51-

Il est important à démontrer les deux parties de l'argument:
l'initialisation et *l'hérédité*.

Contre-exemple 1. Hypothèse : Tout nombre naturel est égal au nombre naturel suivant. 😊

Hérédité : Supposons que $P(n)$ soit vraie : $n = n+1$

Alors en ajoutant 1 à l'égalité on obtient $n+1 = n+2 \Rightarrow P(n+1)$ est vrai.

Faute, on a oublié l'initialisation, mais $0 \neq 1$ (axiome de $\mathbb{R}$).

$\Rightarrow$ L'hypothèse n'a pas été démontrée.

Ex. Prouver la somme de n premiers nombres naturels impairs.

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + 3 = 4$$

$$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$\text{Hypothèse } S_n = 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Dém par récurrence: (1) Initialisation: déjà démontrée pour $n = 1, 2, 3, 4$.

(2) Hérédité: Supposons que $S_n = n^2$. Il faut en déduire que $S_{n+1} = (n+1)^2$.

$$S_{n+1} = \underbrace{1+3+\dots+(2n-1)}_{S_n} + \underbrace{(2n+1)}_{\text{par supposition}} = S_n + (2n+1) \stackrel{\text{par supposition}}{=} n^2 + (2n+1) = (n+1)^2 \quad \text{Vrai.}$$

$$\Rightarrow \text{par récurrence, } \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \square$$

Contre-exemple 2. Hypothèse : „Tous les crayons sont de la même couleur!“
(dans n'importe quel ensemble de $n \geq 1$ crayons).

„Dém:“ (1) Initialisation:

Dans un ensemble d'un seul crayon,
tous les crayons sont de la même couleur.

$\Rightarrow P(1)$ est vraie.



(2) Hérité : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

On suppose que tout ensemble de n crayons contient seulement des crayons de la même couleur.

Soit $\{c_1, c_2 \dots c_{n+1}\}$ un ensemble arbitraire de $(n+1)$ crayons.

Alors $\{c_1, \dots, c_n\}$ sont de la même couleur
supposition $\searrow$ $\{c_2, \dots, c_{n+1}\}$ sont de la même couleur $\Rightarrow c_1$ et c_{n+1} sont de la même couleur que les autres.

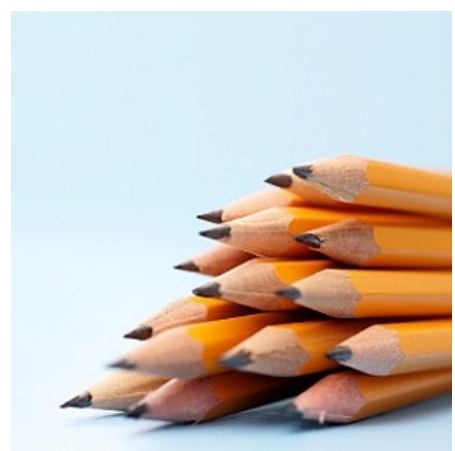
$\Rightarrow \{c_1 \dots c_{n+1}\}$ sont de la même couleur.

$\Rightarrow P(n+1)$ vraie

$\underbrace{\{c_1, c_2 \dots c_n, c_{n+1}\}}_{\text{même couleur}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{même couleur}}$

couleur de $c_1 =$ couleur de $c_2 =$ couleur de c_{n+1}

$\{c_1 \dots c_{n+1}\}$
de la même couleur.

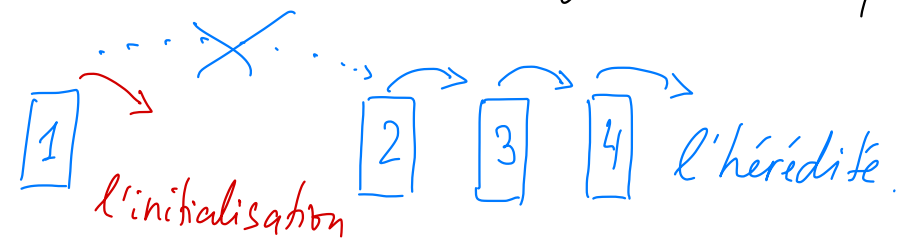


La faute: L'hérité $P(n) \rightarrow P(n+1)$ ne marche que pour $n \geq 2$

$P(1) \not\Rightarrow P(2)$ Mais l'initialisation est vérifié seulement pour $P(1)$.



Les dominos:



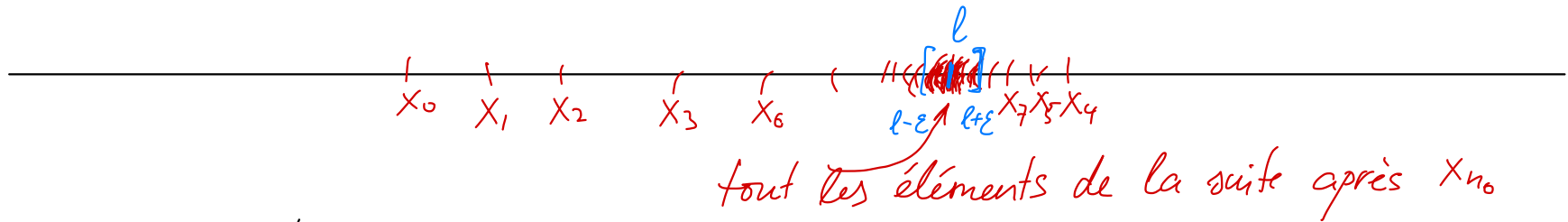
§2.2. Limites des suites.

-54-

Déf On dit que la suite (x_n) est *convergente* et admet pour *limite* le nombre réel $l \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $|x_n - l| \leq \varepsilon$.

Notation : $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

Remarque : $|x_n - l| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x_n - l \leq \varepsilon \iff l - \varepsilon \leq x_n \leq l + \varepsilon$.



Quel que soit $\varepsilon > 0$, si on considère l'intervalle $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$ autour de l , alors on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que tous les termes de la suite (x_n) après $n = n_0$ se trouvent dans cet intervalle.

Déf. Une suite qui n'est pas convergente est dite *divergente*.

Ex. La suite (a_n) , $a_n = \frac{1}{n+1}$ est convergente, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Dém: Soit $\varepsilon > 0$. Il nous faut démontrer l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$
(qui peut dépendre de ε)

tel que $\forall n \geq n_0$, $|a_n - 0| \leq \varepsilon$

$$\text{Donc } \left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{>0} \leq \underbrace{\varepsilon}_{>0} \Leftrightarrow n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Puisque $\mathbb{N}$ n'est pas majoré $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$

et $\forall n \geq n_0 \Rightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$ - Vrai

$\Rightarrow$ par la déf de la limite, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Une autre façon de démontrer l'existence de n_0 : le trouver explicitement

On peut trouver un exemple de n_0 explicitement: $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \Rightarrow n_0 + 1 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$
partie entière

$$\Rightarrow \text{Si } n \geq n_0 \Rightarrow n+1 \geq n_0+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$\Rightarrow$ On a trouvé un $n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$

$$\left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$$

$$\parallel$$

$$|a_n - \ell|$$

$< \varepsilon \Rightarrow$ par la définition de la limite,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

